03/04/2017

Μάθημα 9ο

Ανα4

Θεωρία (Τσέτσης) Κριτήριο Lebesgue

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Μετρήσιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ φραγμένη και συνεχής σχεδόν παντού $\Longleftrightarrow \exists \int_B f \ (\in \mathbb{R})$

φραγμένη και συνεχής σχεδόν παντού $\Leftrightarrow$ f συνεχής σε κάθε $\bar{x} \in B \setminus N$, όπου N έχει μηδενικό μέτρο.

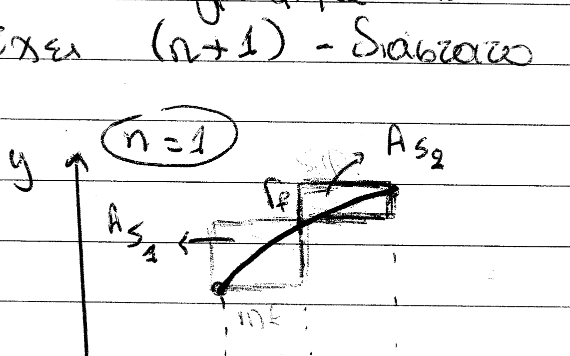
• Jordan-μετρήσιμο $\Longleftrightarrow$ B φραγμένο και ∂B μηδενικό μέτρο ($\Leftrightarrow$ μηδενικό περιεχόμενο)

• $\exists \int_B f \ (\in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \int_A f_B$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό ορθογώνιο με $B \subset A$ και

$$f_B = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in B \\ 0, & \bar{x} \notin B \end{cases}$$

Πρόταση 4.1.16. (SOS 1)

Έστω $B \subset \mathbb{R}^{(n)}$ J-μετρήσιμο και $f: B \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε το γράφημα της f, $\Gamma_f = \{ (\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in B \} \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$ έχει $(n+1)$-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο



$B = [a, b]$, $f: B \to \mathbb{R}$

με $A_S = S \times [\inf f|_S, \sup f|_S]$

και έχουμε:

$$\Gamma_f \subset \bigcup_{S \in \wp_P} \underbrace{S \times [\inf f|_S, \sup f|_S]}_{= A_S}$$

Τα [illegible] γραφήματα είναι Jordan - μετρήσιμα

ΟΛΑ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ !

<u>Απόδειξη.</u>

Διαισθητικά, οκ, αφού μας λέει ότι το [καμπύλη] δεν έχει εμβαδό. Αυστηρή απόδειξη σε απλή περίπτωση:

$n=1$, $B=[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\xrightarrow{\text{Lebesgue}}$ $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη $\xrightarrow[\text{Riemann}]{\text{κριτήριο}}$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists P\in \mathcal{P}(B) : U(f,P)-L(f,P) =$$

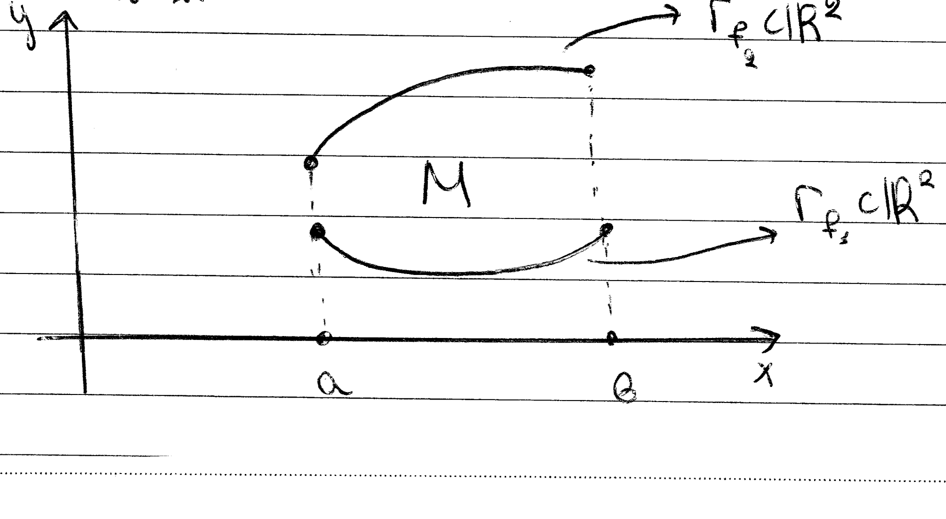
$$= \sum_{S\in S_P} \left(\sup f/S - \inf f/S\right)\cdot V(S) < \varepsilon$$

<u>Θεώρημα 4.1.12.</u> SOS2

Έστω $B\subset\mathbb{R}^n \neq \emptyset$ Jordan-μετρήσιμο και $f_1,f_2 : B\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες με $f_1\leq f_2$. Τότε το:

$M=\{(\bar{x},y) : \bar{x}\in B,\ f_1(\bar{x})\leq y\leq f_2(\bar{x})\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$

είναι J-μετρήσιμο με περιεχόμενο $\underbrace{V(M)}_{\int_M 1} = \int_B (f_2-f_1)$



$B=[a,b]$
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$.
συνεχής

$$V(M) = \int_{M} 1 = \int_{B} (f_2-f_1) = \int_B f_2 - \int_B f_1$$

$M \to \subset\mathbb{R}^{n+1}$, $B \to \subset\mathbb{R}^{n}$

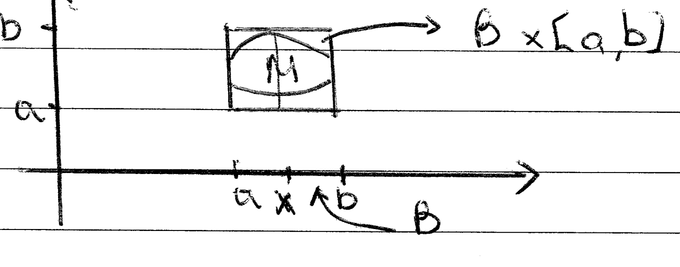
Απόδειξη.

Το ότι το M είναι Jordan-μετρήσιμο προκύπτει (εκτός από το ότι είναι φραγμένο) από το ότι τα $\Gamma_{f_1}, \Gamma_{f_2}$ έχουν $(n+1)$-διάστατο μηδενικό περιεχόμενο και, επίσης, «οι τοίχοι» έχουν, επίσης, μηδενικό περιεχόμενο ως υποσύνολα υπερεπιπέδων στο $\mathbb{R}^{n+1}$.

Απόδειξη του τύπου για $n=1$, $B=[a,b]$, $f_1, f_2 : B \to \mathbb{R}$ συνεχείς (βλ. σχήμα)

Εξ ορισμού: $V(M) \overset{\text{ορ.}}{=} \int_M 1 \overset{\text{ορ.}}{=} \int_{B\times[a,b]} \chi_M(x,y)\,d(x,y)$

όπου $a \le \underbrace{\inf f_1}_{\substack{\| \\ (\text{εδώ})\ \min f_1}} \le \underbrace{\sup f_2}_{\overset{\text{εδώ}}{=} \max f_2} \le b$



$\forall\, x \in [a,b] = B$: $\quad \chi_M(x,y) = \begin{cases} 1, & f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ 0, & y > f_2(x) \vee y < f_1(x) \end{cases}$

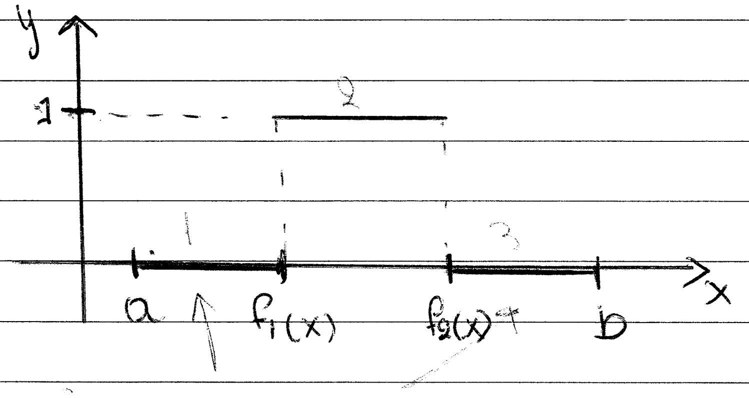
και $\displaystyle\int_a^b \chi_M(x,y)\,\underline{\underline{dy}} = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\,dy = f_2(x) - f_1(x)$

καθορισμένο x

και από Fubini: $\displaystyle\int_{B\times[a,b]} \chi_M = \int_a^b \left(\int_a^b \chi_M(x,y)\,dy \right) dx =$

$\displaystyle = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx = \int_B (f_2 - f_1)$

Για σταθερό $x \in [a, b]$



Θεώρημα 4.1.13. (SOS3) (Αρχή του Cavalieri)

Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$ J-μετρήσιμο με:

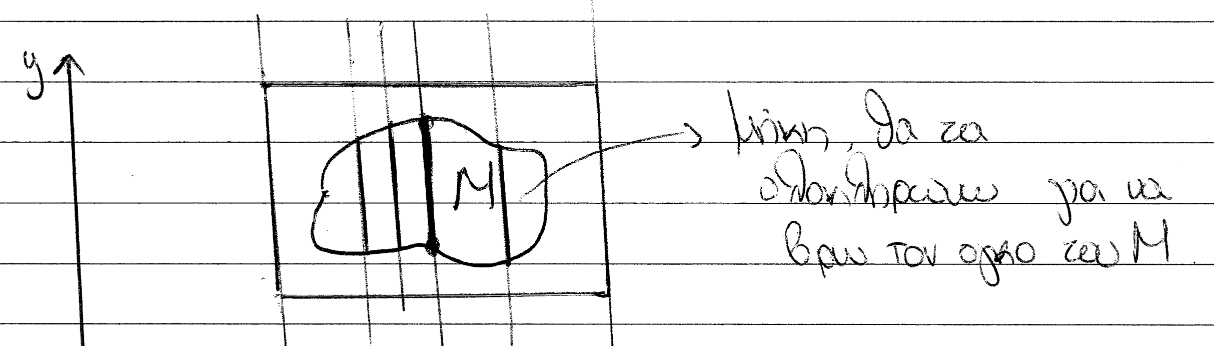
(α) Το M είναι μεταξύ των υπερεπιπέδων $x_1 = a$, $x_1 = b$

(β) $\forall \xi \in [a,b]$ η τομή του υπερεπιπέδου $x_1 = \xi$ με το M έχει $(n-1)$-διάστατο περιεχόμενο Jordan $q(\xi)$.

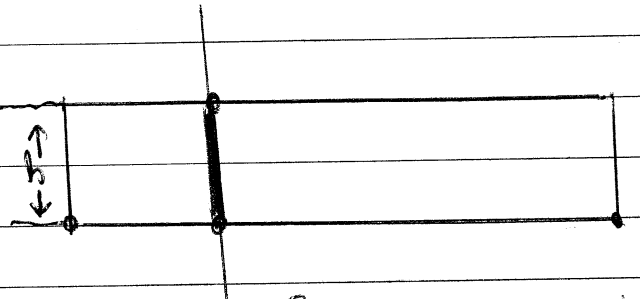
Τότε η $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη με

$$V(M) = \int_a^b q(\xi)\, d\xi$$

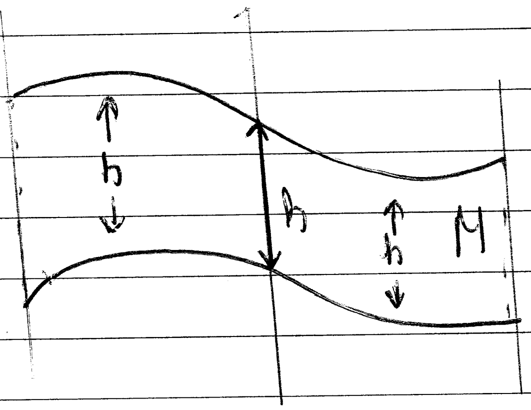
$n=2$



$$V(M) = h(b-a) = \int_a^b h \, d\xi = \int_a^b q(\xi)\, d\xi \quad \text{με} \quad q(\xi) = h$$

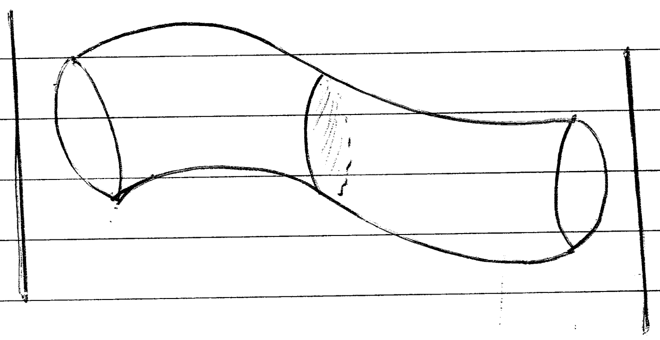


$x = a$ $\quad$ $x = \xi$ $\quad$ $b = x$



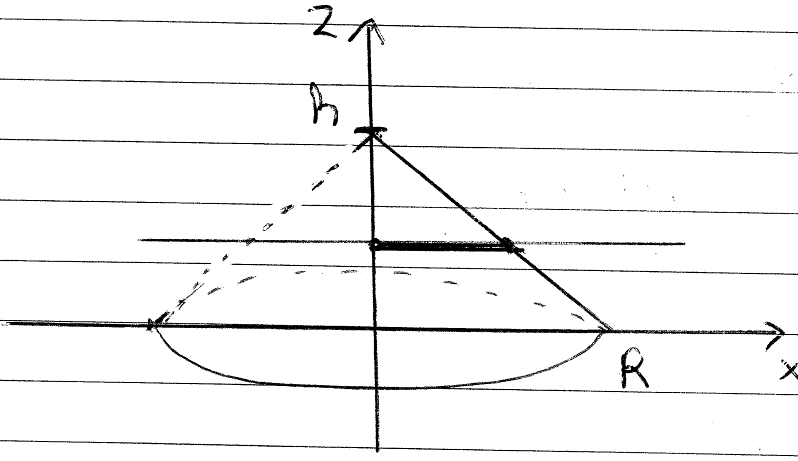
$$V(M) = h(b-a)$$

$a = x$ $\quad$ $x = \xi$ $\quad$ $x = b$



$n = 3$

$x = a$ $\quad$ $x = b$



Παρατήρηση: Η αρχή του Cavalieri ισχύει αν αντί για x_1 έχουμε x_i, $i=1,\dots,n$.

Απόδειξη.

Αφού το $M \subset \mathbb{R}^n$ είναι J-μετρήσιμο και από το (α) έχουμε $M \subset [a,b]\times A$, όπου $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ κλειστό ορθογώνιο

$$\xrightarrow{\text{ορισμός}} V(M) = \int_M 1 = \int_{[a,b]\times A} \chi_M(x_1, \underset{(x_2,\dots,x_n)}{x'})\, d(x_1,x') \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_a^b \Big(\underbrace{\int_A \chi_M(x_1,x')\, dx'}_{=q(x_1)} \Big)\, dx_1$$

αν το εσωτερικό ολοκλήρωμα υπάρχει $\forall x_1 \in [a,b]$.

Επίσης, αν αυτό ισχύει και $= q(x_1)$ έχουμε τελειώσει.

Από το (β) έχουμε ότι τα σύνολα:

$Q(\xi) = \{ \bar{x}' \in \mathbb{R}^{n-1} : (\xi, \bar{x}') \in M \}$ $\quad \xi \in [a,b]$

είναι Jordan-μετρήσιμα (στο $\mathbb{R}^{n-1}$)

Με περιεχόμενο $V(Q(\xi)) = q(\xi)$

Επίσης, $\forall \xi \in [a,b)$ $\boxed{\bar{x}' \in Q(\xi) \Leftrightarrow (\xi, \bar{x}') \in M} \subset [a,b] \times A$

$\Rightarrow (\xi, \bar{x}') \in \{\xi\} \times A \Leftrightarrow \bar{x}' \in A$. Συνεπώς $Q(\xi) \subset A$

Άρα: $q(\xi) = V(Q(\xi)) = \int_A \chi_{Q(\xi)}(\bar{x}')\, d\bar{x}'$

Όμως, $\chi_{Q(\xi)}(\bar{x}') = \begin{cases} 1, & \bar{x}' \in Q(\xi) \\ 0, & \bar{x}' \notin Q(\xi) \end{cases} =$

$= \begin{cases} 1, & (\xi, \bar{x}') \in M \\ 0, & (\xi, \bar{x}') \notin M \end{cases}$

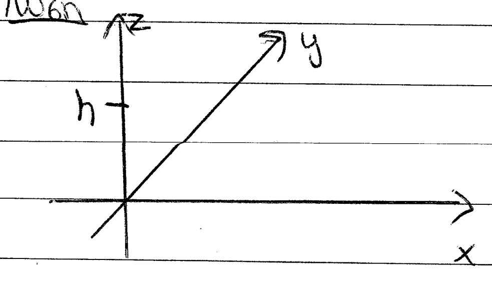
$= \chi_M(\xi, \bar{x}')$

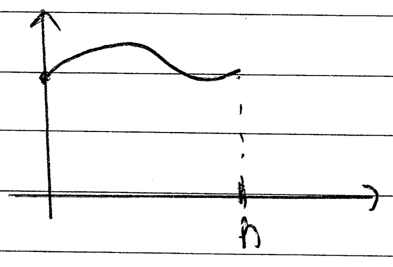
$\Rightarrow q(\xi) = \int_A \chi_M(\xi, \bar{x}')\, d\bar{x}'$

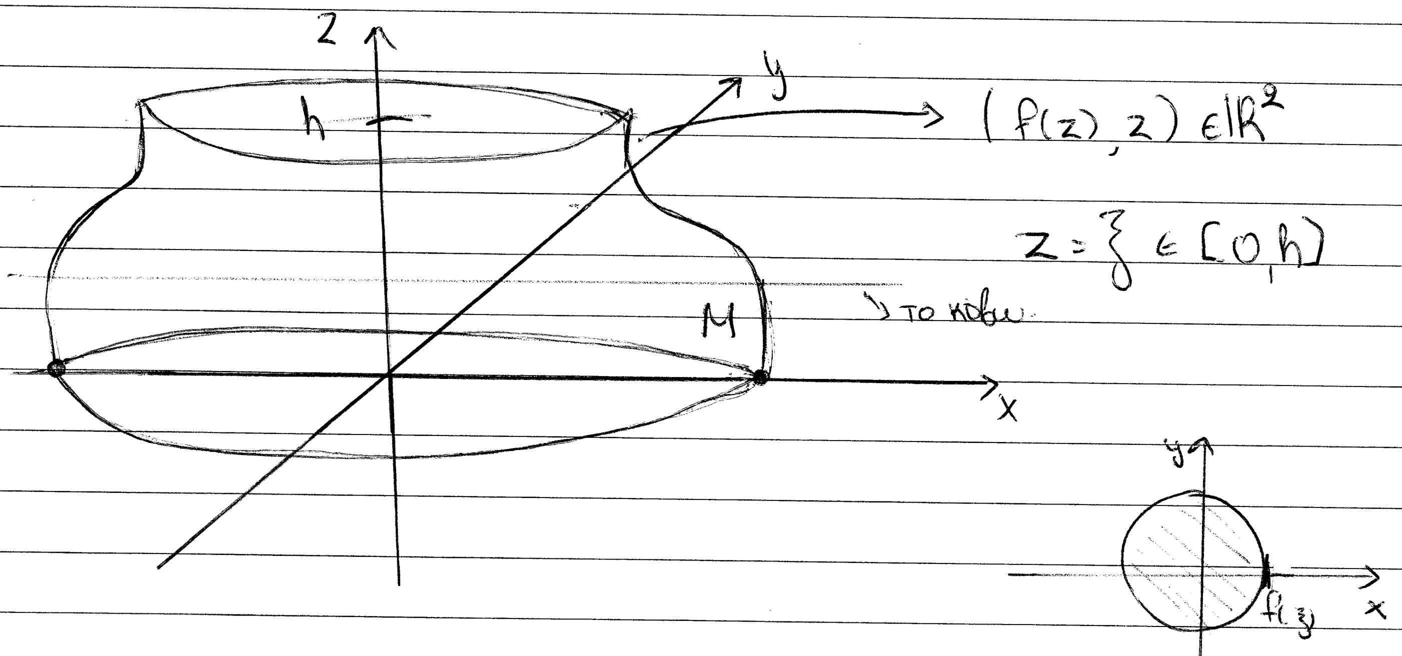
Άσκηση (Θέμα παλαιότερο)

(α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f > 0$ και f: συνεχής.
Δείξτε ότι το σύνολο από την περιστροφή της f (το γράφημά της) γύρω από τον άξονα του z έχει όγκο $\pi \cdot \int_0^h f^2(\xi)\, d\xi$

Λύση





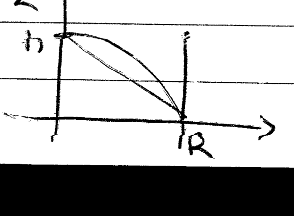


$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,h],\ x^2 + y^2 \leq f^2(z)\}$$

$$V(M) \underset{\text{Cavalieri}}{\overset{\text{αρχή}}{=}} \int_0^h dz\, \pi f^2(z),$$

αφού ο κυκλικός δίσκος ακτίνας R έχει εμβαδό πR^2

(β) Υπολογίστε με αυτή τη μέθοδο τον όγκο μιας άνω μπάλας ενός κυλίνδρου ενός κώνου ύψους z και ακτίνας R.



(οπίσω)

Εφαρμογή του SOS!:

Θέλω να υπολογίσω το εμβαδό του κυκλικού δίσκου

$x^2 + y^2 \leq R^2$

Δηλ. $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq R^2} \}$

$\Delta = M$

$$y^2 \leq R^2 - x^2 \quad , \quad x \in [-R, R]$$

$$\iff |y| \leq \sqrt{R^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-R, R]$$

$$\iff -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \quad , \quad x \in [-R, R]$$

Δηλ: $\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-R, R] \, , \, \underbrace{-\sqrt{R^2 - x^2}}_{= f_1(x)} \leq y \leq \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{= f_2(x)} \}$

$$\Rightarrow V(\Delta) = \int_{-R}^{R} \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \dots = \pi R^2$$